



Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a VIII-a

SOLUȚII

Problema 1. Fie $x \in \mathbb{R}$. Numerele $[x]$ și $\{x\}$ sunt invers proporționale cu numerele 0,1 și respectiv 0,2 și verifică egalitatea

$$\sqrt{3} \cdot [x] + \sqrt{2}^3 \cdot \{x\} = \left[(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{41} \right]^{7^2} \cdot \left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{134} \right]^{15}.$$

Dacă $n = \left(x - \sqrt{2}^{-2}\right)^0 + \left(x - \sqrt{2}^{-2}\right)^1 + \left(x - \sqrt{2}^{-2}\right)^2 + \dots + \left(x - \sqrt{2}^{-2}\right)^{2009}$, atunci n este un număr natural divizibil cu 67. ($[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x).

Duma Vasile, profesor, Galați

Soluție : $\frac{[x]}{\frac{1}{0,1}} = \frac{\{x\}}{\frac{1}{0,2}} \Rightarrow \frac{[x]}{10} = \frac{\{x\}}{5} \Rightarrow [x] = 2 \cdot \{x\}$. Înlocuind în ipoteză, obținem:

$$2 \cdot \sqrt{3} \cdot \{x\} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \{x\} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2009} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2010} \Leftrightarrow 2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot \{x\} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \Rightarrow \{x\} = 0,5$$

Atunci $[x] = 1 \Rightarrow x = 1,5$.

$$n = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{\text{de 2010 ori}} \Rightarrow n = 2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \Rightarrow 67 \mid n.$$

Problema 2. Dacă a și b sunt numere naturale impare, atunci $\sqrt{a^2 + b^2 + 4} \notin \mathbb{Q}$.

Viorica Bujor, profesor, Galați

Soluție: Presupunem că $\sqrt{a^2 + b^2 + 4} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{N}^*, a^2 + b^2 + 4 = c^2$.

Din a, b numere naturale impare, fie $a = 2 \cdot k + 1$ și $b = 2 \cdot p + 1$, $k, p \in \mathbb{N}$.

$$\text{Atunci, } a^2 + b^2 + 4 = 2 \cdot \left[2 \cdot (k^2 + k + p^2 + p + 1) + 1 \right] \quad (1).$$

Folosind (1), rezultă că 2 divide pe $c^2 \Rightarrow 2$ divide pe c și deci $c^2 = 4 \cdot d^2$, $d \in \mathbb{N}^*$.

Înlocuind în (1), obținem

$2d^2 = 2(k^2 + k + p^2 + p + 1) + 1$, adică un număr par egal cu un număr impar (contradicție!)

Deci $\sqrt{a^2 + b^2 + 4} \notin \mathbb{Q}$.

Problema 3. Fie $a, b > 0$. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $a^3 + b^3 \geq a^2 \cdot b + a \cdot b^2$;

b) $2 \cdot (a^3 + 1 + a^3 \cdot b^3) \geq a^3 \cdot b + a^3 \cdot b^2 + a^2 \cdot b^2 + a \cdot b + a^2 + a$.

Vasile Popa, profesor, Galați

Soluție : a)

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 \geq a^2 \cdot b + a \cdot b^2 &\Leftrightarrow (a+b) \cdot (a^2 - a \cdot b + b^2) \geq a \cdot b \cdot (a+b) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a+b) \cdot (a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b) \cdot (a-b)^2 \geq 0, \text{ adevărat.} \end{aligned}$$

b) Conform punctului a), avem:

$$a^3 + 1 \geq a^2 + a;$$

$$a^3 \cdot b^3 + 1 \geq a^2 \cdot b^2 + a \cdot b;$$

$$a^3 + a^3 \cdot b^3 = a^3 \cdot (1 + b^3) \geq a^3 \cdot (b + b^2) = a^3 \cdot b + a^3 \cdot b^2.$$

Adunând membru cu membru inegalitățile de mai sus, obținem relația din enunț.

Problema 4. Pe planul pătratului $ABCD$, $AB = a$, se ridică perpendiculara AP . Se consideră

punctele $M \in [BC]$, $N \in [CD]$, $BM = CN = \frac{a}{3}$, iar $AM \cap BN = \{E\}$.

Fie punctul $Q \in [AE]$, $\frac{AQ}{QE} = \frac{1}{2}$.

Să se determine lungimea segmentului $[AP]$ astfel încât măsura unghiului diedru determinat de planele (PQD) și (ABC) să fie de 60° .

Manuela Totolici, profesor, Galați

Soluție : Construim $QS \parallel EB$, $S \in AB$.

Conform teoremei lui Thales, rezultă că

$$\frac{AS}{SB} = \frac{1}{2}, \quad \frac{AS}{AB} = \frac{1}{3},$$

de unde rezultă că

$$AS = \frac{a}{3}, \quad SB = \frac{2 \cdot a}{3} = DN, \text{ de unde rezultă că}$$

patrulaterul $DNBS$ este paralelogram, deci

$DS \parallel NB$, adică punctele D, Q, S sunt coliniare.

Din $\triangle ASD \equiv \triangle BMA \Rightarrow m(\angle ADS) = m(\angle BAM) = 90^\circ - m(\angle DAQ)$, de unde rezultă

că triunghiul AQD este dreptunghic în Q , deci $AQ \perp DS$. Din teorema celor

trei perpendiculare rezultă că $PQ \perp DS$, deci $m[\angle((PDQ), (ABC))] = m(\angle PQA) = 60^\circ$

și deci $tg(\angle PQA) = \frac{AP}{AQ} = \sqrt{3}$.

$$\triangle AQS \sim \triangle ABM \Rightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{AS}{AM} \Rightarrow AQ = \frac{a \cdot \sqrt{10}}{10} \Rightarrow AP = AQ \cdot \sqrt{3} = \frac{a \cdot \sqrt{30}}{10}.$$

